

2.5 Θεωρημα Μεσων Τιμης

① $f(x) = x^2 - 4x + 5$ $\Delta = [1, 4]$ να βρεθεί το $\xi \in (1, 4)$ που ικανοποιεί το ΘΜΤ.

Λύση

$f \in [1, 4]$ ως πολυωνυμική

$f \in (1, 4)$ ως πολυωνυμική

Αρα $\exists$ τουλάχιστον $\xi \in (1, 4)$:

$$f'(\xi) = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \begin{aligned} f(4) &= 16 - 16 + 5 = 5 \\ f(1) &= 1 - 4 + 5 = 2 \end{aligned}$$

$$f'(\xi) = \frac{5 - 2}{3} = 1.$$

$$f'(x) = 2x - 4$$

$$f'(\xi) = 1 \Rightarrow 1 = 2\xi - 4 \Rightarrow 5 = 2\xi$$

$\xi = \frac{5}{2}$
δεκτό.

② f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(0) = 0$
και $1 \leq f'(x) \leq 2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Ν.Δ.Ο. $\forall x > 0$
ισχύει $x \leq f(x) \leq 2x$

Λύση

ΘΜΤ. $\Delta = [0, x]$.

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x}.$$

Αρα

$$1 \leq f'(\xi) \leq 2 \Rightarrow 1 \leq \frac{f(x)}{x} \leq 2.$$

$$x \leq f(x) \leq 2x$$